

السؤال الأول (20) درجة:

ليكن المودول $M_n(\mathbb{R})$ ولتكن $U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = A\}$. أثبت أن U مودول جزئي في المودول $M_n(\mathbb{R})$.

السؤال الثاني (30) درجة :

ننظر إلى Z كمودول على ذاتها والمطلوب:

(1) ✓ أوجد $6Z + 4Z$; $6Z \cap 4Z$.

(2) بين إن كان هذا المودول نيوترياً أم أرتينياً ؟

(3) أثبت أن Z ليس مجموعاً مباشراً لمودولين جزئيين غير تافهين فيه.

السؤال الثالث (20) درجة :

نفرض أن $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ و $g \in \text{Hom}_R(N, C)$ ، والمطلوب:

(1) ✓ أثبت أن: $gf \in \text{Hom}_R(M, C)$.

(2) أثبت أن: $\text{Ker}(gf) = f^{-1}(\text{Ker } g)$.

السؤال الرابع (30) درجة :

ليكن $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ وليكن U مودولاً جزئياً في المودول M ، والمطلوب:

(1) ✓ أثبت أن المتتالية $0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} (M/U) \longrightarrow 0$ ، تامة.

(2) أثبت أن: $f^{-1}(f(U)) = U + \text{Ker } f$ ، واستنتج أنه إذا كان f متبايناً فإن:

$$f^{-1}(f(U)) = U$$

(3) إذا كان M بسيطاً فأثبت أن f الهومومورفيزم الصفري أو أنه متباين.

5

السؤال الأول (20)

• $\forall \alpha \in R; \forall A \in U: (\alpha A)^t = \frac{1}{\alpha} A^t = \alpha SA \rightarrow \alpha A \in U$

محاسبہ بنیادی
محاسباتی جزئیات

السؤال الثاني (30)

$$6Z + 4Z = 2Z \quad \underline{5}$$

$$6Z \cap 4Z = 12Z$$

(١) المجموع حوله بالسهم المشترك المثلث للمصلحة.

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

(2) لمة جميع الحدود الجزائرية في حق كرد مستقل mZ دولة مطلوبه :

$$Z \hookrightarrow mZ \hookrightarrow m^2Z \hookrightarrow \dots \hookrightarrow$$

وغير هذا هو الوجه، لانه لو كان المقام هو المخرج، لكان ذلك في غير هذا المقام.

بنیما از افکار P عدد اولیای PZ غیر محدودی است. PZ عدد اولیای PZ غیر محدودی است.

~~از جمله $PZ \subset Z$ و چون Z یک فضای هیلبرت است پس PZ نیز یک فضای هیلبرت است. از آنجا که PZ یک فضای هیلبرت است، بنابراین PZ یک فضای هیلبرت است.~~

۲۲ مندرجہ بالا، صحیح۔ و لذلک صحیح و سہی۔

[illegible]

$m \neq 0$ $n \neq 0$ $n \neq 0$

~~$$Z = mZ \oplus nZ \sim \text{...} \quad L.C.m(m,n) \quad \Delta \cdot mZ \cap nZ = S Z \neq 0$$~~

السؤال الثاني

$$\forall \alpha, \beta \in R; \forall x, y \in M: \quad \begin{aligned} & \alpha + \beta = \beta + \alpha \\ & \alpha(\beta + \gamma) = (\alpha\beta) + (\alpha\gamma) \\ & (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \\ & \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \\ & \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \\ & \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \end{aligned} \quad : \quad \begin{aligned} & gf: M \rightarrow C \\ & x \mapsto (gf)(x) = g(f(x)) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (gf)(\alpha x + \beta y) &= g[f(\alpha x + \beta y)] = g[\alpha f(x) + \beta f(y)] = \\ &= \alpha g(f(x)) + \beta g(f(y)) = \alpha (gf)(x) + \beta (gf)(y) \\ &\quad gf \in \text{Hom}(M, C) \end{aligned}$$

$\forall n \in M: n \in \text{Ker}(gf) \Leftrightarrow (gf)(n) = 0 \Leftrightarrow g(f(n)) = 0 \Leftrightarrow$
 $f(n) \in \text{Ker } g \Leftrightarrow n \in f^{-1}(\text{Ker } g)$
 $\text{Ker}(gf) = f^{-1}(\text{Ker } g) \quad \text{c.s.d.}$

(1) كلوية متشابهة ناتجة إذا كانت كل متشابهة جزئية ناتجة ، ونرى هذا

المتشابهة : $M \xrightarrow{f} M \rightarrow M/\text{Ker } f$ ناتجة ناتجة ناتجة
 $\text{Im } f = \text{Ker } g$ ناتجة ناتجة ناتجة
 $M \xrightarrow{f} M/\text{Ker } f \rightarrow 0$ ناتجة ناتجة ناتجة
 إذن المتشابهة المتشابهة ناتجة

(2)
 $\forall a \in f^{-1}(f(V)) \Rightarrow f(a) \in f(V) \Rightarrow \exists u \in V : f(a) = f(u) \Rightarrow$
 $f(a-u) = 0 \Rightarrow (a-u) \in \text{Ker } f \Rightarrow \exists a' \in \text{Ker } f : a' = a-u \Rightarrow$
 $a = u + a' \in V + \text{Ker } f \Rightarrow f^{-1}(f(V)) \subseteq V + \text{Ker } f$

$\forall u + k \in V + \text{Ker } f \Rightarrow f(u+k) = f(u) + f(k) = f(u) + 0 = f(u) \in f(V)$
 $u \in V, k \in \text{Ker } f$
 $u + f^{-1}(f(V))$
 $V + \text{Ker } f \subseteq f^{-1}(f(V))$ إذن

وهو هو ما عين تم المبراة .

ولذا كان المتشابهة ناتجة $\text{Ker } f = \{0\}$ ونعتبر $V + \text{Ker } f = V$

(3) إذا كان M بسيطاً فإنه أي مودول جزئي هو الصف أو M نفسه أو $\{0\}$
 $\text{Ker } f$ مودول جزئي في M فإن $\text{Ker } f = \{0\}$ وهذا يؤدي إلى f متشابهة
 أو أنه $\text{Ker } f = M$ وهذا يؤدي إلى f المودول صفر جزئي.

لذا من الجواب بآلية طريقة أخرى أصبحت نتوصل إلى المبراة بما يتكافؤ
 مع هذا السك.